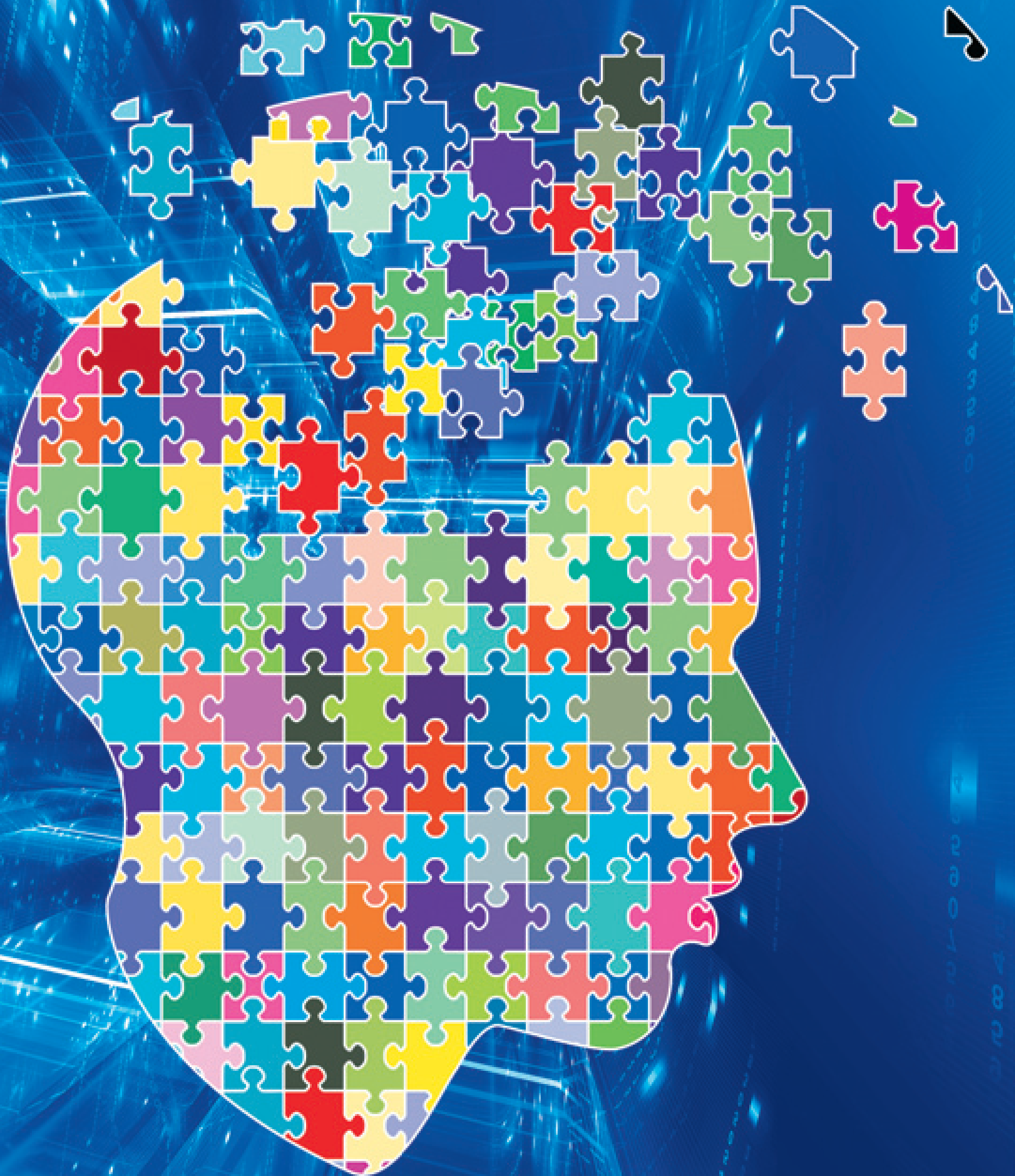
№ 14 Издание основано в 1995 г inf.1september.ru
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ

ИНФОРМАТИКА



Азбука Роботландии. От основ до самых до... с. 4

Устройства ввода и вывода. Теория относительности. с. 24

Хит ЕГЭ: системы логических уравнений. с. 30

Ха! Хаскель! Серебряная пуля современного программирования? с. 36

издательский дом 1september.ru
Первое сентября | сентябрь 2011
ИНФОРМАТИКА Индексы подписки «Роспечати»: 32291 (бумажная версия), 19179 (электронная); «Почта России»: 79066 (бумажная версия), 12684 (электронная)

О НОМЕРЕ

Этот номер получился очень содержательным и разнообразным. Большую часть материалов в нем безо всякой натяжки можно назвать эксклюзивными – только у нас и только для нас. Описание исполнителей “Азбуки Роботландии” – уникальный материал, статья о системах логических уравнений – на самую злобу, пусть уже и прошедшего дня (но ведь и оглянуться не успеем, как и новый ЕГЭ повиснет на носу), материал о языке Хаскель – мы давно мечтали его сделать.

Читайте с удовольствием.

В НОМЕРЕ

НА ДИСКЕ

ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ:

- Демонстрационные версии “Азбуки Роботландии” — учебника и методички (по три полных урока)
- Демонстрационные версии практикумов по исполнителям “РС-1” и “Агент РБ”
- Пакет “Хиты Роботландии” (версия для DOS)
- Программа для решения систем логических уравнений
- Исходные тексты программ к статье о языке Хаскель и интерпретатор языка (установочный пакет)
- Презентации

ИНФОРМАТИКА

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ: по каталогу “Роспечати”: 32291 (бумажная версия), 19179 (электронная версия); “Почта России”: 79066 (бумажная версия), 12684 (электронная версия)

http://inf.1september.ru

Учебно-методический журнал для учителей информатики
Основан в 1995 г.
Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
гл. редактор С.Л. Островский
редакторы
Е.В. Андреева,
Д.М. Златопольский (редактор вкладки “В мир информатики”)
Дизайн макета И.Е. Лукьянов
верстка Н.И. Пронская
корректор Е.Л. Володина
секретарь Н.П. Медведева
Фото: фотобанк Shutterstock
Журнал распространяется по подписке
Цена свободная
Тираж 3000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-48-96
E-mail: inf@1september.ru
http://inf.1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ “ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ”
Главный редактор:
Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность:
Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов:
Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение:
Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение:
Павел Кузнецов
Производство:
Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение:
Андрей Ушков
Главный художник:
Иван Лукьянов
Педагогический университет:
Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТА ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА
Первое сентября – Е.Бирюкова
ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА
Английский язык – А.Громушкина
Библиотека в школе – О.Громова
Биология – Н.Иванова
География – О.Коротова
Дошкольное образование – М.Аромштам
Здоровье детей – Н.Сёмина
Информатика – С.Островский
Искусство – М.Сартан
История – А.Савельев
Классное руководство и воспитание школьников – О.Леонтьева
Литература – С.Волков
Математика – Л.Рослова
Начальная школа – М.Соловейчик
Немецкий язык – М.Бузоева
Русский язык – Л.Гончар
Спорт в школе – О.Леонтьева
Управление школой – Я.Сартан
Физика – Н.Козлова
Французский язык – Г.Чесновицкая
Химия – О.Блохина
Школьный психолог – И.Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО “ЧИСТЫЕ ПРУДЫ”
Зарегистрировано ПИ № ФС77-44341 от 22.03.2011
в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 15.08.2011, фактически 15.08.2011
Заказ №
Отпечатано в ОАО “Чеховский полиграфический комбинат”
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Тел./факс: (499) 249-31-38
Отдел рекламы:
(499) 249-98-70
http://1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-47-58
E-mail: podpiska@1september.ru

Документооборот Издательского дома “Первое сентября” защищен антивирусной программой Dr.Web

Системы логических уравнений

К.Ю. Поляков,
д. т. н., учитель
информатики школы № 163,
Санкт-Петербург

Все школьники на уроках математики знакомятся с алгебраическими и трансцендентными уравнениями. Более экзотические *логические* уравнения, в которых все величины могут принимать только два значения (“истина” и “ложь”), традиционно тоже относились к математике [1–3]. На практике они оказались полезны при разработке цифровых логических устройств [4–5] и в последние годы стали появляться в заданиях ЕГЭ по информатике. Так как ни в одном школьном учебнике соответствующего материала нет, учителю приходится разбираться в этом вопросе самостоятельно. В данной статье мы попытаемся немного прояснить ситуацию.

Далее для сокращения записи истинное значение обозначается единицей, а ложное — нулем. Для логических операций “И”, “ИЛИ”, “исключающее ИЛИ”, “импликация” и “эквивалентность” будем использовать знаки “·”, “+”, “⊕”, “→” и “≡” соответственно, а операцию “НЕ” обозначим чертой сверху.

Решение логических задач

Начнем с логической задачи, которая сводится к системе логических уравнений.

Задача 1. *Следующие два высказывания истинны:*

(*1*). *Неверно, что если корабль A вышел в море, то корабль C — нет.*

(*2*). *В море вышел корабль B или корабль C, но не оба вместе.*

Определить, какие корабли вышли в море.

Обозначим буквами высказывания:

A — “корабль A вышел в море”,
B — “корабль B вышел в море”,
C — “корабль C вышел в море”.

Тогда высказывание “*если корабль A вышел в море, то корабль C — нет*” можно записать в виде $\mathbf{A} \to \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{1}$. По условию (1), это высказывание *неверно*, таким образом, имеем $\mathbf{A} \to \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$. Кроме того, из (2) получаем $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{1}$. Итак, решение задачи сводится к решению системы логических уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{A} \to \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{1} \end{cases}$$

Нужно найти тройку логических значений **A**, **B** и **C**, при которых оба уравнения превращаются в истинные равенства. Покажем несколько способов решения этой системы.

Способ 1. *Сведение к одному уравнению*. Сначала преобразуем уравнения так, чтобы правые части были равны 1 (истинному значению). Для этого применим инверсию (операцию “НЕ”) к обеим частям первого уравнения:

$$\begin{cases} \overline{A \to \overline{C}} = 1 \\ A \oplus B = 1 \end{cases}$$

Теперь представляем импликацию и “исключающее ИЛИ” через базовые операции (“И”, “ИЛИ”, “НЕ”):

$$\begin{cases} \overline{\overline{A} + \overline{C}} = 1 \\ \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = 1 \end{cases}$$

Поскольку необходимо, чтобы левые части обоих уравнений были равны 1, можно объединить их с помощью операции “И” в одно уравнение, равносильное исходной системе:

$$\left(\overline{\overline{A} + \overline{C}}\right) \cdot \left(\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}\right) = 1$$

Раскрываем инверсию в первой скобке по закону де Моргана и вносим “сомножитель” A в скобку, не забыв, что $A \cdot \overline{A} = 0$ и $A \cdot A = A$:

$$A \cdot C \cdot \left(\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}\right) = 1 \Leftrightarrow A \cdot \overline{B} \cdot C = 1$$

Последнее уравнение, равносильное исходной системе, имеет единственное решение: $A = 1$, $B = 0$ и $C = 1$. Таким образом, в море вышли корабли A и C.

Способ 2. *Таблица истинности.* Поскольку логические величины имеют только два значения, можно просто перебрать все варианты и найти среди них те, при которых выполняется данная система уравнений. Для системы с тремя переменными возможны 8 вариантов:

A	B	C	$A \to \overline{C}$	$A \oplus B$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0

Зеленым цветом выделена единственная строчка, для которой выполняются условия задачи, то есть $A \to \overline{C} = 0$ и $A \oplus B = 1$. Таким образом, $A = 1$, $B = 0$ и $C = 1$, это значит, что в море вышли корабли A и C. Недостаток этого метода — трудоемкость при большом количестве переменных (больше 4).

Заметим, что такой подход особенно удобен при автоматизации решения подобных задач. Именно он (совместно с приведением системы к одному уравнению) используется в программе для решения систем логических уравнений, которая размещена на диске-приложении к этому номеру.

Способ 3. *Декомпозиция.* Идея состоит в том, чтобы зафиксировать значение одной из переменных (положить ее равной 0 или 1) и за счет этого упростить уравнения. Затем можно зафиксировать значение второй переменной и т.д. В нашем случае при $A = 0$ получаем

$$\begin{cases} 0 \to \overline{C} = 0 \\ 0 \oplus B = 1 \end{cases}$$

Известно, что импликация ложна только в одном случае — когда посылка истинна, а следствие ложно ($1 \to 0 = 0$). Поэтому первое уравнение (и, следовательно, вся система) при $A = 0$ решений не имеет. Теперь рассмотрим второй случай, когда $A = 1$:

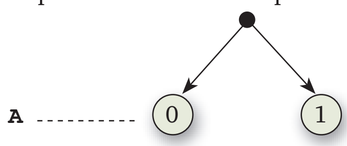
$$\begin{cases} 1 \to \overline{C} = 0 \\ 1 \oplus B = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения в силу свойств импликации сразу следует, что $\overline{C} = 0$ или $C = 1$, а из второго — $B = 0$ ($A \oplus B = 1$ означает, что $A \neq B$). Таким образом, существует единственное решение системы: $A = 1$, $B = 0$ и $C = 1$; это значит, что в море вышли корабли A и C.

Способ 4. *Последовательное решение уравнений.* В некоторых случаях можно решать уравнения последовательно, на каждом шаге добавляя по одной переменной в рассматриваемый набор. Чтобы вводить переменные в алфавитном порядке, поменяем местами уравнения в нашей системе:

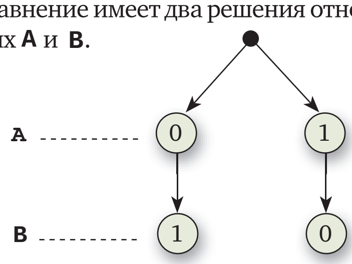
$$\begin{cases} A \oplus B = 1 \\ A \to \overline{C} = 0 \end{cases}$$

Мы видим, что первое уравнение зависит только от A и B, а в третьем подключается переменная C. Будем строить дерево решений и одновременно записывать его в свернутом виде в таблицу. Переменная A может принимать два значения:



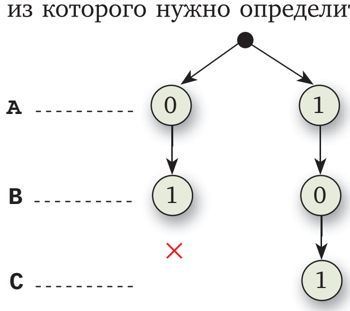
A
0
1

Из первого уравнения $A \oplus B = 1$ следует, что $A \neq B$, поэтому при $A = 0$ получаем единственный вариант $B = 1$, а при $A = 1$ имеем $B = 0$. Итак, первое уравнение имеет два решения относительно переменных A и B.



A	B
0	1
1	0

Теперь “подключаем” второе уравнение $A \to \overline{C} = 0$, из которого нужно определить допустимые значения C для каждого варианта. При $A = 0$ импликация не может быть ложна, то есть первая строчка предыдущей таблицы не дает ни одного решения системы двух уравнений. При



$A = 1$ получаем единственное решение, для которого $C = 1$:

A	B	C
1	0	1

Таким образом, существует единственное решение системы: $A = 1$, $B = 0$ и $C = 1$. Это значит, что в море вышли корабли A и C.

Количество решений

Иногда требуется определить только *количество* решений системы логических уравнений, при этом находить сами решения не нужно.

Задача 2. *Найти количество решений системы уравнений:*

$$\begin{cases} \overline{X}_1 + X_2 = 1 \\ \overline{X}_2 + X_3 = 1 \\ \ldots \\ \overline{X}_9 + X_{10} = 1 \end{cases}$$

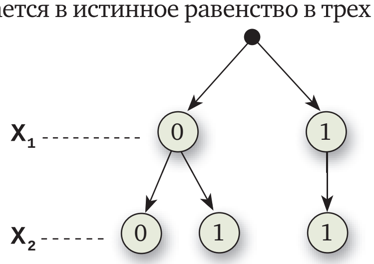
где $X_1 \ldots X_{10}$ *— неизвестные логические величины.*

Здесь 10 переменных, поэтому при решении системы через таблицу истинности нужно заполнить 2^{10} = 1024 строки, что трудновыполнимо. Поэтому решения, сводящиеся к полному перебору вариантов, нужно отбросить. Поскольку все правые части равны 1, можно легко свести систему к одному уравнению:

$$(\overline{X}_1 + X_2) \cdot (\overline{X}_2 + X_3) \cdot \ldots \cdot (\overline{X}_9 + X_{10}) = 1,$$

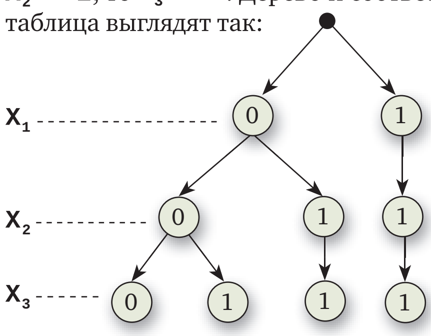
но такой подход также не внушает оптимизма.

Несложно заметить, что первое уравнение зависит только от X_1 и X_2, затем во втором уравнении добавляется X_3 и т.д. Поэтому логично попробовать решать уравнения последовательно. Начнем строить дерево решений, и одновременно будем записывать его в виде таблицы. Первое уравнение, $\overline{X}_1 + X_2 = 1$, обращается в истинное равенство в трех случаях:



X_1	X_2
0	0
0	1
1	1

Теперь подключаем второе уравнение, $\overline{X}_2 + X_3 = 1$. Допустимые значения X_3 зависят от ранее выбранного значения X_2: если $X_2 = 0$, то X_3 может принимать любое значение (0 или 1), а если $X_2 = 1$, то $X_3 = 1$. Дерево и соответствующая ему таблица выглядят так:



X_1	X_2	X_3
0	0	0
		1
0	1	1
1	1	1

Легко заметить, что при добавлении очередного уравнения (и очередной переменной) верхняя строка таблицы (где все нули) дает два решения (они выделены зеленым фоном), а остальные строки — по одному. Поэтому количество решений увеличивается на 1. Таким образом, система из трех уравнений имеет 5 решений, из четырех — 6, а исходная система из девяти уравнений — 11 решений.

Рассмотрим более сложный пример на ту же тему.

Задача 3. *Найти количество решений системы уравнений:*

$$\begin{cases} (X_2 \equiv X_1) + X_2 \cdot X_3 + \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3 = 1 \\ (X_3 \equiv X_1) + X_3 \cdot X_4 + \overline{X}_3 \cdot \overline{X}_4 = 1 \\ \ldots \\ (X_9 \equiv X_1) + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X}_9 \cdot \overline{X}_{10} = 1 \\ (X_{10} \equiv X_1) = 0 \end{cases}$$

где $X_1 \ldots X_{10}$ *— неизвестные логические величины.*

Здесь, так же как и в предыдущей задаче, удобнее всего последовательно решать уравнения и записывать полученные решения в таблицу (дерево рисовать не будем для сокращения записи). Сначала упростим исходные уравнения, заметив, что $X_2 \cdot X_3 + \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3 = (X_2 \equiv X_3)$, так что исходную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} (X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1 \\ (X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1 \\ \ldots \\ (X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1 \\ (X_{10} \equiv X_1) = 0 \end{cases}$$

В первом уравнении используются три переменных ($X_1 \ldots X_3$). Значения X_1 и X_2 могут быть выбраны произвольно четырьмя способами:

X_1	X_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Теперь добавляем X_3 и первое уравнение как ограничение. Запишем в таблицу все комбинации переменных, при которых выполняется первое уравнение:

X_1	X_2	X_3
0	0	0
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0
1	1	1

Если $X_2 = X_1$, то значение X_3 может быть любое (эти строки выделены зеленым цветом), а при $X_2 \neq X_1$ получаем только один вариант: $X_3 = X_2$.

Таким образом, при подключении первого уравнения число решений увеличивается на количество строк в таблице, для которых значения X_1 и X_2 (последней рассмотренной переменной) равны. В данном случае таких строк две, получаем 6 решений. Более того, в новой таблице снова осталось всего две строки (верхняя и нижняя), где $X_3 = X_1$. Как следует из второго уравнения, именно эти (и только эти) строки на следующем шаге "раздваиваются", дают по два решения. Таким образом, при подключении к системе очередного уравнения число решений увеличивается на 2. Для двух уравнений получим 8 решений, для трех — 10, а для восьми — 20 решений.

Остается учесть последнее (особое) уравнение, $(X_{10} \equiv X_1) = 0$. Это означает, что $X_{10} \neq X_1$. Из анализа таблицы видно, что есть всего две строки (верхняя и нижняя), где первая и последняя переменные равны. Поэтому из полученных 20 решений нужно отбросить эти два, не удовлетворяющие последнему уравнению. В итоге исходная система имеет 18 решений.

Замена переменных

В некоторых случаях задача упрощается, если использовать замену переменных.

Задача 4. *Найти количество решений системы уравнений:*

$$\begin{cases} X_1 \cdot \bar{X}_2 + \bar{X}_1 \cdot X_2 + X_3 \cdot X_4 + \bar{X}_3 \cdot \bar{X}_4 = 1 \\ X_3 \cdot \bar{X}_4 + \bar{X}_3 \cdot X_4 + X_5 \cdot X_6 + \bar{X}_5 \cdot \bar{X}_6 = 1 \\ X_5 \cdot \bar{X}_6 + \bar{X}_5 \cdot X_6 + X_7 \cdot X_8 + \bar{X}_7 \cdot \bar{X}_8 = 1 \\ X_7 \cdot \bar{X}_8 + \bar{X}_7 \cdot X_8 + X_9 \cdot X_{10} + \bar{X}_9 \cdot \bar{X}_{10} = 1 \end{cases}$$

где $X_1 \ldots X_{10}$ *— неизвестные логические величины.*

Сначала упростим эти уравнения, используя свойства операций "исключающее ИЛИ" и "эквивалентность". В первом уравнении

$$X_1 \cdot \bar{X}_2 + \bar{X}_1 \cdot X_2 = (X_1 \oplus X_2) = \overline{(X_1 \equiv X_2)}$$

$$X_3 \cdot X_4 + \bar{X}_3 \cdot \bar{X}_4 = (X_3 \equiv X_4)$$

Применяя подобные преобразования во всех уравнениях, получаем

$$\begin{cases} \overline{(X_1 \equiv X_2)} + (X_3 \equiv X_4) = 1 \\ \overline{(X_3 \equiv X_4)} + (X_5 \equiv X_6) = 1 \\ \overline{(X_5 \equiv X_6)} + (X_7 \equiv X_8) = 1 \\ \overline{(X_7 \equiv X_8)} + (X_9 \equiv X_{10}) = 1 \end{cases}$$

Далее замечаем, что можно ввести новые переменные

$$Y_1 = (X_1 \equiv X_2), \quad Y_2 = (X_3 \equiv X_4)$$
$$Y_3 = (X_5 \equiv X_6), \quad Y_4 = (X_7 \equiv X_8)$$
$$Y_5 = (X_9 \equiv X_{10})$$

и система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \bar{Y}_1 + Y_2 = 1 \\ \bar{Y}_2 + Y_3 = 1 \\ \bar{Y}_3 + Y_4 = 1 \\ \bar{Y}_4 + Y_5 = 1 \end{cases}$$

Важно, что переменные $Y_1 \ldots Y_5$ независимы, то есть каждая из исходных переменных $X_1 \ldots X_{10}$ входит только в одну из новых переменных.

Полученная система совпадает по форме с системой, которая рассматривалась в задаче 2. Используя результаты решения задачи 2, сразу находим, что наша система из четырех уравнений имеет 6 решений относительно переменных $Y_1 \ldots Y_5$.

Остается вернуться обратно к исходным переменным $X_1 \ldots X_{10}$. Предположим, что значение $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$ фиксированно (0 или 1). Тогда, согласно таблице истинности операции "эквивалентность", существует ровно две пары значений (X_1, X_2), при которых Y_1 имеет заданное значение (как для $Y_1 = 0$, так и для $Y_1 = 1$). Таким образом, каждая комбинация значений $Y_1 \ldots Y_5$ дает по две возможные пары (X_1, X_2), (X_3, X_4), (X_5, X_6), (X_7, X_8) и (X_9, X_{10}), то есть всего $2^5 = 32$ комбинации исходных переменных.

Таким образом, общее количество решений равно $6 \cdot 32 = 192$.

Решение — функция

Рассмотрим более сложную задачу, в которой требуется найти логическую функцию, удовлетворяющую заданному уравнению (или системе уравнений). Задачи такого типа могут встречаться на практике при разработке схем логического управления [4–5].

Задача 5. *Найти логическую функцию* $X(A, B)$, *которая при любых значениях логических переменных* A *и* B *удовлетворяет системе уравнений:*

$$\begin{cases} X + A = \bar{X} \cdot A + B \\ A + B + \bar{X} = 1 \end{cases}$$

Заметим, что классические методы решений систем уравнений, известные из математики, здесь не работают, потому что для логических величин не определено вычитание и деление.

Такие системы проще всего решать с помощью таблиц истинности. Для каждой возможной комбинации значений переменных A и B получаем систему уравнений с одним неизвестным X:

A	B	Система уравнений	X
0	0	$\begin{cases} X = 0 \\ \bar{X} = 1 \end{cases}$	0
0	1	$\begin{cases} X = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$	1
1	0	$\begin{cases} 1 = \bar{X} \\ 1 = 1 \end{cases}$	0
1	1	$\begin{cases} 1 = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$	0 или 1

Заметим, что в последней строчке значение X может быть любым. Поэтому исходной системе удовлетворяют две логические функции, которые задаются таблицами истинности

A	B	X_1
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

A	B	X_2
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В первом случае получаем $X_1 = \bar{A} \cdot B$, а во втором — $X_2 = \bar{A} \cdot B + A \cdot B = B$. Исходная система уравнений имеет два решения.

Логические уравнения такого типа не всегда имеют решение в двузначной логике. Например, уравнение $X + A = \bar{X} + B$ не имеет решений, потому что при $A = B = 0$ получаем $X = \bar{X}$, что невыполнимо.

Задачи для тренировки:

1) На вопрос “Кто из твоих учеников изучал логику?” учитель ответил: “Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис. Однако неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис”. Составьте систему логических уравнений и определите, кто же изучал логику. (Ответ: только Семен.)

2) Суд присяжных пришел к таким выводам: а) если Аськин не виновен или Баськин виновен, то виновен Сенькин; б) если Аськин не виновен, то Сенькин не виновен. Составьте систему логических уравнений, решите ее и сделайте выводы о виновности трех подозреваемых. (Ответ: Аськин точно виновен, про остальных ничего определенного сказать нельзя.)

3) Прогноз погоды выглядит так: “Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя. Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра. Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра”. Составьте и решите систему логических уравнений и определите, какая погода может быть завтра. (Ответ: ясно, ветер, без осадков.)

4) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} (X_1 \equiv X_2) \cdot (X_3 \equiv X_4) + (\overline{X_1 \equiv X_2}) \cdot (\overline{X_3 \equiv X_4}) = 0 \\ (X_3 \equiv X_4) \cdot (X_5 \equiv X_6) + (\overline{X_3 \equiv X_4}) \cdot (\overline{X_5 \equiv X_6}) = 0 \\ (X_5 \equiv X_6) \cdot (X_7 \equiv X_8) + (\overline{X_5 \equiv X_6}) \cdot (\overline{X_7 \equiv X_8}) = 0 \\ (X_7 \equiv X_8) \cdot (X_9 \equiv X_{10}) + (\overline{X_7 \equiv X_8}) \cdot (\overline{X_9 \equiv X_{10}}) = 0 \end{cases}$$

где $X_1 \ldots X_{10}$ — логические переменные?
(Ответ: 64)

5) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} X_1 \cdot X_2 + \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 + (X_1 \equiv X_3) = 1 \\ X_2 \cdot X_3 + \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 + (X_2 \equiv X_4) = 1 \\ \ldots \\ X_7 \cdot X_8 + \bar{X}_7 \cdot \bar{X}_8 + (X_7 \equiv X_9) = 1 \\ X_8 \cdot X_9 + \bar{X}_8 \cdot \bar{X}_9 + (X_8 \equiv X_{10}) = 1 \end{cases}$$

где $X_1 \ldots X_{10}$ — логические переменные?
(Ответ: 20)

6) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} X_1 \cdot X_2 + \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 + (X_1 \equiv X_3) = 1 \\ X_2 \cdot X_3 + \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 + (X_2 \equiv X_4) = 1 \\ \ldots \\ X_7 \cdot X_8 + \bar{X}_7 \cdot \bar{X}_8 + (X_7 \equiv X_9) = 1 \\ X_8 \cdot X_9 + \bar{X}_8 \cdot \bar{X}_9 + (X_8 \equiv X_{10}) = 0 \end{cases}$$

где $X_1 \ldots X_{10}$ — логические переменные?
(Ответ: 16)

7) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} X_1 \cdot X_2 + \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 + X_2 \cdot X_3 + \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 = 1 \\ X_2 \cdot X_3 + \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 + X_3 \cdot X_4 + \bar{X}_3 \cdot \bar{X}_4 = 1 \\ \ldots \\ X_8 \cdot X_9 + \bar{X}_8 \cdot \bar{X}_9 + X_9 \cdot X_{10} + \bar{X}_9 \cdot \bar{X}_{10} = 1 \end{cases}$$

где $X_1 \ldots X_{10}$ — логические переменные?
(Ответ: 178)

8) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} X_1 \cdot X_2 + \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 + X_2 \cdot X_3 + \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 = 1 \\ X_2 \cdot X_3 + \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 + X_3 \cdot X_4 + \bar{X}_3 \cdot \bar{X}_4 = 1 \\ \ldots \\ X_7 \cdot X_8 + \bar{X}_7 \cdot \bar{X}_8 + X_8 \cdot X_9 + \bar{X}_8 \cdot \bar{X}_9 = 1 \\ X_8 \cdot X_9 + \bar{X}_8 \cdot \bar{X}_9 + X_9 \cdot X_{10} + \bar{X}_9 \cdot \bar{X}_{10} = 0 \end{cases}$$

где $X_1 \ldots X_{10}$ — логические переменные?
(Ответ: 42)

9) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} (X_1 \equiv X_2) + X_1 \cdot X_{10} + \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_{10} = 1 \\ (X_2 \equiv X_3) + X_2 \cdot X_{10} + \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_{10} = 1 \\ \ldots \\ (X_9 \equiv X_{10}) + X_9 \cdot X_{10} + \bar{X}_9 \cdot \bar{X}_{10} = 1 \\ (X_1 \equiv X_{10}) = 0 \end{cases}$$

где $X_1 \ldots X_{10}$ — логические переменные?
(Ответ: 0)

10) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} (X_1 \to X_2) + (X_1 \to X_3) = 1 \\ (X_2 \to X_3) + (X_2 \to X_4) = 1 \\ \ldots \\ (X_8 \to X_9) + (X_8 \to X_{10}) = 1 \end{cases}$$

где $X_1 \ldots X_{10}$ — логические переменные?
(Ответ: 232)

11) Найдите все пары логических функций $(X(A, B); Y(A, B))$, удовлетворяющие при любых значениях логических переменных A и B системе уравнений:

$$\begin{cases} X \cdot \bar{A} + B = B \cdot Y \\ Y \cdot \bar{B} + A = A \cdot X \end{cases}$$

(Ответ: $X = A$ или $X = A + B$; $Y = 0$ или $Y = A \cdot \bar{B}$, причем X и Y могут выбираться независимо друг от друга.)

12) Найдите все пары логических функций $(X(A, B); Y(A, B))$, удовлетворяющие при любых значениях логических переменных A и B системе уравнений:

$$\begin{cases} X \cdot \bar{A} + B = B \cdot \bar{Y} \\ Y \cdot \bar{B} + A = A \cdot \bar{X} \end{cases}$$

(Ответ: $X = 0$ или $X = \bar{A} \cdot B$; $Y = B$ или $Y = A + B$, причем X и Y могут выбираться независимо друг от друга.)

13) Найдите все пары логических функций $(X(A, B); Y(A, B))$, удовлетворяющие при любых значениях логических переменных A и B системе уравнений:

$$\begin{cases} X \cdot \bar{A} + B \cdot \bar{X} = B \cdot Y \\ Y \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{Y} = A \cdot X \end{cases}$$

(Ответ: Существует две группы решений по 4 решения в каждой:

I. $X = \bar{A} \cdot B$ или $X = A \oplus B$;
$Y = A$ или $Y = A + B$

II. $X = B$ или $X = A + B$;
$Y = A \cdot \bar{B}$ или $Y = A \oplus B$.

В пределах каждой группы X и Y могут выбираться независимо друг от друга.)

Дополнительные материалы

1. *Тарасова А.П.* Системы логических уравнений. *http://festival.1september.ru/articles/416929/*.
2. *Левченков В.С.* Булевы уравнения. М.: Диалог МГУ, 1999.
3. *Закревский А.Д.* Логические уравнения. М.: УРСС, 2003.
4. *Шалыто А.А.* Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации. СПб.: Наука, 2000.
5. *Вальциферов Ю.Ф., Дронов В.П.* Информатика. Часть I. М.: Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2005.

Автор признателен О.А. Тузовой за ценные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Robots.txt никогда не причинит вред человеку?

Прошедшим летом много шуму наделали истории о появлении в выдаче поисковых систем персональных данных людей, производивших те или иные операции в Интернете. Речь, в частности, шла об отправке SMS с сайта оператора мобильной сети, покупке билетов и т.д. Сразу, как водится, нашлось немалое количество желающих немедленно найти и наказать виноватых. Кого-то нашли, кого-то наказали, но уверенности в том, что те, кто искал и наказывал, хорошо понимали, в чем дело, увы, нет. Так в чем же дело?

Поисковые роботы не занимаются хакерством. Они могут добраться лишь до страниц, которые находятся в открытом доступе — не закрыты теми или иными способами авторизации. Более того, они могут добраться лишь до страниц, о которых им каким-либо способом становится известно. Последнее важно. Если вы разместите на своем сайте страницу, о которой никому не скажете, и ссылку на нее никому не дадите, роботы о ней не узнают. Они не перебирают все возможные строки, выясняя, нет ли страницы с таким именем.

Такой способ “защиты” нередко используется в случаях, когда полноценная авторизация неудобна для пользователей. Пример с отправкой SMS характерен. Представьте себе, что SMS с сайта оператора смогут отправлять лишь зарегистрированные пользователи. Удобно ли это для самих пользователей? Ведь придется сначала регистрироваться, затем каждый раз вводить логин и пароль, периодически забывать и то и другое и восстанавливать или регистрироваться заново. Поэтому в подобных случаях нередко применяют “защиту”, которая заключается в том, что, например, страница с результатами отправки SMS имеет имя подобное 545d6464ab64436f128a199e361d73c6c18a72097 (это, разумеется, просто случайный набор цифр и букв). Случайно найти такую страницу нереально, ссылок на нее не выставляется и, как кажется, “защита” вполне надежная? Да, но… Проблема, которая возникла этим летом, была в ряде случаев (не во всех) связана с тем, что на таких страницах зачем-то находились счетчики обычных рейтинговых систем. А счетчик — та же самая ссылка! Он же, фиксируя факт посещения, передает адрес страницы!

От этого можно было бы уберечься, запретив индексацию таких страниц специальными директивами в файле robots.txt. Но и этого сделано не было.

В любом случае, производя те или иные операции в Интернете, надо понимать, что всегда имеется риск утечки данных. Полностью избежать этого нельзя — и администраторы, и программисты, и даже специалисты в области аудита систем безопасности — обычные люди. Они могут ошибиться и по отдельности, и все вместе (последнее случается редко, но, как видим, случается).

Впрочем, риск утечки данных при операциях в оффлайне ничем не меньше (больше — поскольку больше роль человеческого фактора).